Caratteri orientanti della Matematica

Contributo per un'analisi epistemica disciplinare

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"

Premessa

L'individuazione dei caratteri essenziali che stanno alla base dello statuto disciplinare della Matematica, che dunque la costituiscono come disciplina, è impresa estremamente vasta e delicata. Con il termine Matematica, infatti, si fa riferimento ad un insieme di attività, di impostazioni, di teorie caratterizzato da elevata varietà, la cui evoluzione storica è stata caratterizzata da percorsi complessi e da molte significative interazioni con altre discipline.

L'attività di orientamento richiede tuttavia la precisazione dei nuclei fondanti della disciplina, al fine di evidenziare i possibili àmbiti di intervento, con l'indicazione di metodologie proprie. Il presente contributo mira a proporre uno schema per lo sviluppo di un'analisi epistemica disciplinare; per quanto osservato, esso deve comunque essere inteso come un intervento aperto.

Matematica e Logica

Il termine *Matematica* (da $\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha$, insegnamento) significa propriamente *Scienza razionale*; possiamo dunque affermare che la Matematica si occupa delle **modalità per la efficace descrizione di situazioni razionalmente significative**. Se consideriamo essenziale la consapevolezza dell'approccio razionale, dobbiamo affermare che la Matematica assume un carattere disciplinare autonomo nell'àmbito del mondo culturale greco, alcuni secoli prima dell'inizio dell'Era Volgare ([1]); non potremmo però ignorare le molte forme di attività matematica (storicamente riconducibili anche a civiltà pre-elleniche) legate ad esigenze pratiche ([2]).

Nella cultura greca, la Matematica e la Logica sembrano comunque avere radici storiche comuni; il loro rapporto si mantenne di reciproca indipendenza tecnica, mentre dal punto di vista metodologico l'edificazione teorica della Matematica richiede gli strumenti propri della Logica (Freguglia, 1978, p. 4).

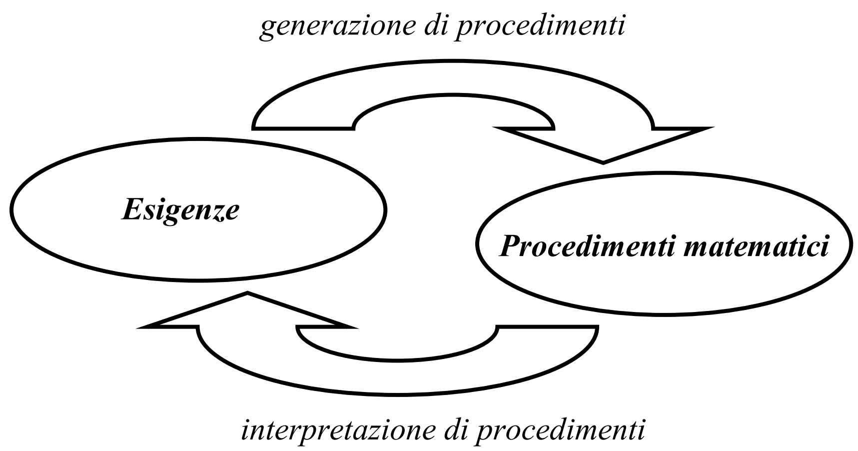
La consapevolezza del fondamentale legame tra Matematica e Logica venne a perfezionarsi progressivamente nel corso dei secoli, fino alla precisazione del programma logicista, ricondotto all'opera di B. Russell (1872-1970; sebbene talvolta gli storici accomunino i nomi di Leibniz, Frege e Russell: Bochenski, 1972) ([3]), che può essere sintetizzato nel tentativo di ricondurre l'intera Matematica alla Logica ([4]).

Russell, nel 1902, affermava che «la matematica pura è l'insieme di tutte le proposizioni della forma "p implica q", dove p e q sono proposizioni che contengono una o più variabili, né p né q contenendo costanti che non siano costanti logiche… Oltre a questi, la matematica usa un concetto che non fa parte delle proposizioni che essa considera, vale a dire la nozione di verità... Il fatto che tutta la matematica sia logica simbolica è una delle scoperte più importanti della nostra epoca; una volta stabilita questa circostanza, ciò che resta dei principi della matematica consiste nell'analisi della logica simbolica stessa» (traduzione in: Cantini, 1979, pp. 118-119 e 120).

Indipendentemente dalla collocazione storico-filosofica di Russell, dunque, appare evidente come i *teoremi* e le loro *dimostrazioni* costituiscano una parte fondamentale dell'essenza stessa della Matematica. Prima di inquadrare la Matematica come teoria, ci occuperemo ancora di alcune caratteristiche specifiche dei procedimenti e dei concetti matematici.

Le attività proprie della Matematica

Per quanto riguarda le attività proprie della Matematica, è indispensabile rifarsi alle motivazioni che ne hanno fornito e ne forniscono scopi e finalità: basilari, anche dal punto di vista storico, devono essere considerate le **esigenze pratiche**: le possibilità di avvalersi di procedimenti di enumerazione ([5]) e di modalità di descrizione del reale ebbero un ruolo chiave nella storia stessa dell'Umanità; come precedentemente anticipato, proprio a tali esigenze dettate dalla pratica si affiancarono presto le autonome **finalità conoscitive**. Le relazioni tra il complesso di tali attività ed il corrispondente sviluppo delle procedure tipicamente matematiche ad esse collegate sono state (e sono tuttora) feconde e stimolanti: molto spesso, dunque, tra le esigenze pratiche e conoscitive che motivano (ed almeno inizialmente determinano) una direzione di elaborazione e di ricerca ed i prodotti di tale elaborazione possiamo evidenziare una mutua influenza, un interscambio importante, spesso culturalmente decisivo.



Le particolarità delle attività matematiche risentono di tale dualità: se da un lato viene privilegiata l'**astrazione**, dall'altro non possono essere trascurate le **applicazioni**, la descrizione del reale ([6]); se la **generalità** e la possibilità di una visione unificatrice sono elementi irrinunciabili, centrali della ricerca matematica, non possiamo non riscontrare la spinta **specializzazione** che caratterizza molti settori della Matematica contemporanea.

Ci limitiamo ad osservare che questa parallela concezione ha importanti riflessi anche in àmbito didattico: lo stesso concetto matematico può essere infatti introdotto sia dal punto di vista **operativo** che dal punto di vista **strutturale**, e spesso la compresenza (ovvero il successivo manifestarsi) di tali specifiche impostazioni assume un ruolo di primaria importanza nell'apprendimento (si veda ad esempio: Sfard, 1991).

Matematica e teorie matematiche

La considerazione della Matematica nell'àmbito di una teoria, cioè di una struttura ipotetico-deduttiva, risale, come sopra notato, alla cultura ellenica. Ma lo sviluppo di tale impostazione ha progressivamente portato alla considerazione di molte profonde questioni epistemologicamente.

Per quanto riguarda la natura delle teorie matematiche, è importante citare la contrapposizione presente fra una **concezione descrittiva** (secondo la quale l'attività del matematico è riconducibile ad una *scoperta*) ed una **concezione costitutiva** della Matematica (in cui l'attività è più liberamente inventiva: Casari, 1973, pp. 13-14).

Alla base di una teoria matematica concepita secondo il **metodo assiomatico** stanno: alcuni *termini primitivi*, oggetti matematici non esplicitamente definiti, ed alcuni *assiomi*, enunciati non dimostrati. Gli assiomi fissano le proprietà dei termini primitivi e regolano i rapporti tra i vari termini primitivi: dunque gli assiomi vengono a costituire una "definizione implicita" dei termini primitivi. Accettato il sistema di termini primitivi e di assiomi, la teoria può essere progressivamente sviluppata: da questo punto in poi, ogni affermazione dovrà essere provata attraverso la dimostrazione di un *teorema* ed ogni ente introdotto dovrà essere corredato da una *definizione*. Caratteristiche fondamentali di una teoria matematica sono: la **non-contraddittorietà**, cioè l'impossibilità di dedurre dagli assiomi due proposizioni contrastanti, e la **completezza**, cioè la possibilità di dimostrare o di confutare, partendo dagli assiomi, *ogni* proposizione espressa nell'àmbito della teoria considerata. Il ruolo di questi ultimi elementi nell'àmbito di una teoria, pur restando fondamentale, non deve tuttavia essere considerato in termini assoluti, come provano i grandi risultati negativi della Logica del XX secolo (Gödel, 1979; Kneale & Kneale, 1972).

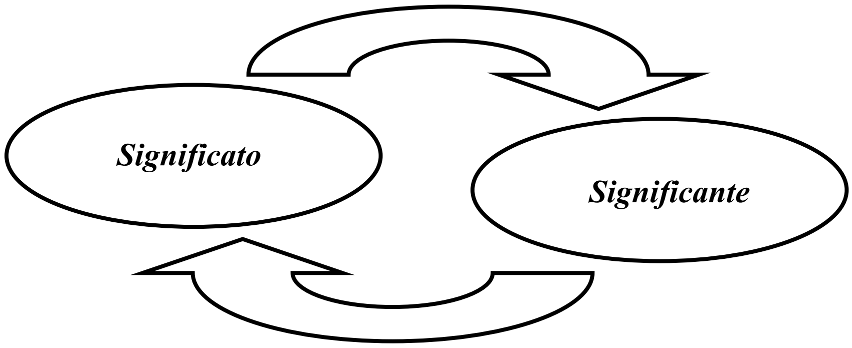
Ci sembra comunque opportuno sottolineare che lo schema tradizionale *teorema-dimostrazione* non esaurisce le forme di espressione e di argomentazione matematica ed in particolare non corrisponde necessariamente al percorso della ricerca disciplinare ([7]), che spesso si svolge attraverso **fasi intuitive** e di **ragionamento analogico** ([8]), con la formulazione di congetture la cui verifica può costituire un insieme di fasi successive.

Segno e significato: il rigore formale

Per quanto precedentemente osservato, spesso gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione, come sono invece gli oggetti "reali" o "fisici"; risultano pertanto necessarie le diverse **rappresentazioni semiotiche** (Duval, 1993, p. 37). Fermo restando che va mantenuta chiara la distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione (Duval, 1993, p. 38), la varietà dei registri rappresentativi è un elemento utile anche per la trasmissione della Matematica, per il suo apprendimento. Se diciamo *sémiosis* l'apprendimento o la produzione di una rappresentazione semiotica e *noésis* l'apprendimento concettuale di un oggetto matematico, possiamo affermare che la *sémiosis* è inseparabile dalla *noésis* (Duval, 1993, p. 40).

Più in generale, l'espressione degli oggetti e dei procedimenti matematici richiede la precisazione di un idoneo **apparato formale**, di un proprio **linguaggio**. Un'osservazione di R. Thom porta a considerare, a questo proposito, un fenomeno del tutto simile a quello precedentemente esaminato: «Nell'interazione *Significato-Significante* è chiaro che il significato… emette, genera il significante… Ma il significante rigenera il significato, ogni volta che noi interpretiamo il segno… La dinamica del simbolismo porta in sé (e sotto forma locale e concentrata) tutte le contraddizioni della visione scientifica del mondo» (Thom, 1974, p. 233, in: Lévi-Strauss, 1984).

Riteniamo indicativa la possibilità di rappresentare la situazione ora descritta mediante uno schema analogo a quello usato precedentemente:



Concludiamo questo paragrafo con alcune considerazioni riguardanti l'**estetica** della Matematica. M. Emmer nota che «l'attenzione che i matematici hanno per le qualità estetiche della loro disciplina… è notevole; da qui discende l'idea di molti matematici, anche contemporanei, che l'attività matematica e quella artistica siano in qualche misura molto simili, paragonabili. La creatività sarebbe il fattore che unisce Matematica e Arte, Arte e Scienza più in generale» (Emmer, 1991, p. 27) ([9]). Certamente alcuni concetti matematici non possono lasciare indifferenti per la loro eleganza, per l'intrinseca capacità di sintesi, per l'assoluta, affascinante generalità; l'ordinata, sintetica, rigorosa efficacia di una dimostrazione non raramente induce una sensazione di ammirazione, di convinto compiacimento ([10]).

Note

([1]) Citiamo M. Kline: la Matematica «come disciplina organizzata e indipendente non esisteva prima dell'entrata in scena dei Greci del periodo classico, compreso fra il 600 ed il 300 a.C.» (Kline, I, 1991, p. 7). Indichiamo inoltre: Bourbaki, 1963; Giusti, 1999.

([2]) Così G. Loria descrive le prime manifestazioni umane riconducibili alla Matematica: «Le transazioni commerciali fra individui e fra popoli differenti, conseguenze inevitabili dell'umano consorzio, e, d'altro lato, l'aspirazione di sottoporre a misura l'universo dei fenomeni di cui il mondo è teatro e il genere umano spettatore, nella segreta speranza di determinarne il meccanismo e scoprirne le forze motrici, condussero, con un irresistibile imperativo categorico, l’uomo, non appena uscito dallo stato di barbarie, a foggiarsi tanto un’embrionale geometria quanto un'infantile aritmetica. Perciò è lecito affermare, senza tema di essere tacciati di esagerazione, che la storia delle matematiche comincia con la storia della civiltà» (Loria, 1929-1933, p. 1).

([3]) Scrive Russell: «La matematica e la logica, dal punto di vista storico, sono state due discipline completamente distinte. Comunque tutte e due si sono sviluppate nell’età moderna: la logica diventando sempre più matematica, la matematica sempre più logica. La conseguenza è che ora è completamente impossibile tracciare tra le due discipline una linea di demarcazione; sostanzialmente le due sono in realtà una disciplina sola» (Russell, 1970, p. 226).

([4]) La presenza delle antinomie mise in crisi il progetto: i tentativi di eludere la loro formazione portarono a teorie profonde (come le teorie dei tipi semplici e ramificati), anche se nessuna di queste riuscì a risolvere radicalmente il problema (Lolli, 1985).

([5]) Ribadiamo che un’elementare aritmetica non può essere considerata come unica radice storica della Matematica; citiamo ancora Russell: «Si dice spesso che la matematica è la scienza delle “quantità”, Veramente la parola “quantità” è molto vaga, e per discutere l’affermazione fatta possiamo sostituirla con la parola “numero”. Ora, l’affermazione che la matematica è la scienza dei numeri è falsa da due punti di vista differenti. Da un lato, esistono intere parti della matematica che non hanno nulla a che fare con i numeri… D’altro lato… ciò che in un primo momento costituiva il semplice studio dell’aritmetica si è andato gradatamente dividendo in una molteplicità di discipline separate, nessuna delle quali particolarmente legata ai numeri» (Russell, 1970, pp. 227-228).

([6]) Di primaria importanza è il ruolo della Matematica dell’incerto, con settori come il Calcolo delle Probabilità e la Statistica (De Finetti, 1995).

([7]) Scrive G. Israel, rifacendosi al pensiero di Federigo Enriques (1871-1946): «Per Enriques, il modo in cui i concetti scientifici vengono acquisiti sul piano psicologico è almeno altrettanto importante della loro verifica formale: infatti, la struttura dei concetti scientifici è determinata dalla via psicologica attraverso cui essi sono stati conseguiti. Pertanto l’analisi della genesi psicologica dei concetti e delle teorie scientifiche è l’aspetto centrale della teoria della conoscenza. Muovendosi temerariamente contro la corrente montante dell’assiomatica e del logicismo, Enriques si spingeva fino al punto di attribuire un ruolo subordinato alla logica nel processo della conoscenza… E poiché i processi psicologici si manifestano nel tempo, un ruolo fondamentale ha, per Enriques, la *storia della scienza*» (Israel, 1992, p. XVI). Giova riportare, a tale riguardo, un brano originale di Enriques: «Che dire di una visione puramente formale che rimane affatto indifferente al contenuto del sapere? … Ben altro è l’insegnamento della storia. Abbiamo pur veduto il pensiero matematico svolgersi da problemi che sono posti alla nostra intuizione, inseguendo una verità che ci appare come qualcosa di dato, e che si chiarisce a poco a poco al nostro spirito anche attraverso l’errore. Dovremmo forse rigettare lontano da noi questa somma di sforzi per celebrare autori delle matematiche quei logici che ne traducono il frutto nel loro linguaggio?» (Enriques, 1938, pp. 141-142; si veda inoltre: Enriques & de Santillana, 1932).

([8]) In tempi più vicini a noi, Francesco Speranza (1932-1998) riprese alcune idee introdotte da Enriques: «In quanto alla pratica matematica, le dimostrazioni sono solo una parte del lavoro (anche per i matematici “puri”): essa è preceduta da una fase di intuizioni, di congetture, di tentativi che via via si perfezionano» (Speranza, 1992, p. 135; inoltre: Kitcher, 1984; Sfard, 1991; Fischbein, 1993; Speranza, 1997 e 1999). Per quanto riguarda l’induzione e l’analogia nell’argomentazione matematica, si veda il classico studio: Polya, 1954. Per un’analisi epistemologica della dimostrazione matematica: Barbin, 1988.

([9]) Nell’opera citata, Emmer affianca due citazioni che sembrano instaurare una sorta di equivalenza logica tra Matematica ed immaginazione: «La più alta categoria dell’intelletto immaginativo è sempre eminentemente matematica” (E.A. Poe). “La facoltà che mette in moto l’invenzione matematica non è il ragionamento, bensì l’immaginazione” (A. De Morgan)» (Emmer, 1991, p. 27). Indichiamo inoltre: Chandrasekhar, 1990.

([10]) Dedichiamo infine un accenno ad alcune caratteristiche sociali della Matematica contemporanea le quali, per la loro rilevanza, vengono ad influenzare la stessa concezione della disciplina: importante è ad esempio la conoscenza ormai diffusa di un sapere matematico istituzionalizzato ma non approfondito (per alcuni fenomeni riguardanti la moderna immagine della Matematica indichiamo: Fiori & Pellegrino, 1997).

Riferimenti bibliografici

Barbin, E. (1988), La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche, *Quaderni di lavoro n. 10*, Istituto Filippin, Paderno del Grappa.

Bochenski, J.M. (1972), *La Logica formale. I. Dai Presocratici a Leibniz. II. La Logica matematica*, Einaudi, Torino.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).

Cantini, A. (1979), *I fondamenti della matematica*, Loescher, Torino.

De Finetti, B. (1995), *Filosofia della probabilità*, Il Saggiatore, Milano.

Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.

Chandrasekhar, S. (1990), *Verità e bellezza. Le ragioni dell'Estetica nella Scienza*, Garzanti, Milano.

Emmer, M. (1991), *La perfezione visibile. Matematica e Arte*, Theoria, Roma-Napoli.

Enriques, F. (1938), *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica, Zanichelli, Bologna 1982).

Enriques, F. & de Santillana, G. (1932), *Storia del pensiero scientifico*, Milano-Roma (degli stessi AA., *Compendio di storia del pensiero scientifico*, prima edizione 1936, ristampa anastatica, Zanichelli, Bologna 1973).

Fiori, C. & Pellegrino, C. (1997), Immagine della matematica tra concezione e divulgazione, *La matematica e la sua didattica*, 4, 426-443.

Fischbein, E. (1983), Intuition and proof, *For the Learning of Mathematics*, 3, 2, 9-24 (Intuizione e dimostrazione, Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 1-24).

Freguglia, P. (1978), *L'algebra della logica*, Editori Riuniti, Roma.

Giusti, E. (1999), *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino.

Gödel, K. (1979), La completezza degli assiomi del calcolo logico funzionale: Casari, E. (a cura di), *Dalla logica alla metalogica*, 137-149, Sansoni, Firenze (edizione originale: *Monatshefte für Mathematik und Phisik*, XXXVII, 349-360, 1930).

Israel, G. (1992), Federigo Enriques e il ruolo dell'intuizione, Enriques, F. & Amaldi, U., *Elementi di geometria*, Studio Tesi, Pordenone (ristampa anastatica dell'edizione: Zanichelli, Bologna 1945).

Kitcher, P. (1984), *The nature of mathematical knowledge*, Oxford University Press, New York.

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972).

Kneale, W.C. & Kneale, M. (1972), *Storia della logica*, Einaudi, Torino.

Lévi-Strauss, C. (1984), Un piccolo enigma mitico-letterario, *Lo sguardo da lontano*, 258-266, Einaudi, Torino (*Le regard éloigné*, Librairie Plon, Paris 1983).

Lolli, G. (1985), *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Il Mulino, Bologna.

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Polya, G. (1954), *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Russell, B. (1970), *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton Compton, Roma.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Speranza, F. (1992), La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità, Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico del CNR, TID, 13, 135-141.

Speranza, F. (1997), *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora, Bologna.

Speranza, F. (1999), Appello all'ermeneutica, *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 8, VI-VII.

Thom, R. (1974), *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, Uge, Paris.